ГЕОМЕТРИЯ вариант №1

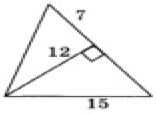
Тест 1

1. В трапеции один из углов, прилежащих к боковой стороне, на 42° больше другого. Найдите больший из этих углов.

Ответ: ______________________

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

Ответ: ______________________

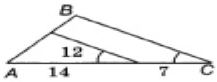


3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 24, BH — высота треугольника, синус угла ABH равен $\frac{2}{3}$. Найдите боковую сторону треугольника.

Ответ: ______________________

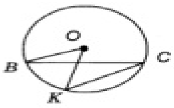
4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите сторону BC.

Ответ: ______________________



5. Найдите градусную меру угла OKC, изображённого на рисунке, если $\angle BOK = 44°$, $\angle CBO = 20°$.

Ответ: ______________________



6. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $BC = 7$, $AC = 8$, $\cos C = \frac{2}{7}$.

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник является параллелограммом.
   2) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то он является прямоугольником.
   3) Каждая диагональ ромба делит пополам два противолежащих угла.
   4) В равнобедренной трапеции противолежащие углы равны.

Часть 2

8. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность. Она касается стороны BC в точке K. Найдите радиус окружности, если $BK = 2$, $CK = 8$.

Ответ: ______________________

9. В треугольнике BEC проведены биссектриса BK и отрезок CM ($M \in BE$), причем $MK \parallel BC$, $EM = EK$. Докажите, что CM — биссектриса треугольника BEC.

10. В треугольнике ABC сторона AB равна 16, отрезки AK и BM являются высотами треугольника. Угол C равен 105°. Найдите площадь треугольника MPK, если P — середина стороны AB.

Тест 2

Часть 1

1. Сумма двух углов параллелограмма равна 110°. Найдите больший угол параллелограмма.

Ответ: ______________________

2. В окружности проведены диаметр MP, хорды MK и PK. Найдите площадь треугольника MPK, если $MK = 14$, $PK = 6$.

Ответ: ______________________

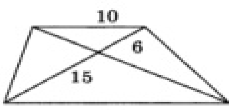
3. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ равна 13, сторона CD равна 5. Найдите синус угла ACD.

1) $\frac{5}{12}$ 3) $\frac{12}{13}$

2) $\frac{12}{5}$ 4) $\frac{5}{13}$

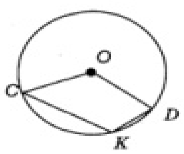
4. Найдите длину большего основания трапеции, изображённой на рисунке.

Ответ: ______________________



5. Найдите градусную меру угла CKD, изображённого на рисунке, если $\angle COD = 130°$.

Ответ: ______________________



7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Если в равнобедренном треугольнике есть угол, равный 98°, то это угол при основании.
   2) Боковая сторона равнобедренного треугольника может быть в 3 раза больше основания.
   3) В равнобедренном треугольнике высоты, проведённые к боковым сторонам, равны.
   4) Если боковые стороны двух равнобедренных треугольников равны, то эти треугольники равны.

Часть 2

8. Дан правильный девятиугольник $ABCDEFGHK$ с центром в точке O. Площадь треугольника BOE равна $16\sqrt{3}$. Найдите длину перпендикуляра OM, опущенного на диагональ BE.

Ответ: ______________________

9. В треугольнике ABC проведены высоты AK и BM. Докажите, что если P — середина стороны AB, то треугольник PKM — равнобедренный.

10. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна $2\sqrt{5}$, сторона BC равна $5\sqrt{2}$. Точка M — середина стороны AD, отрезок BM перпендикулярен диагонали AC. Найдите диагональ BD.

Тест 3

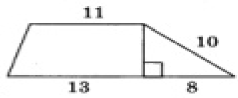
Часть 1

1. В равнобедренном треугольнике внешний угол при вершине, противолежащей основанию, равен 144°. Найдите угол при основании.

Ответ: ______________________

2. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

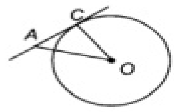
Ответ: ______________________



3. Прямая AC касается в точке C окружности с центром O. Найдите радиус окружности, если $\angle OAC = 60°$, $OA = 20$.

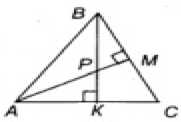
1) $10\sqrt{2}$ 3) 10

2) $10\sqrt{3}$ 4) $15\sqrt{3}$



4. В треугольнике ABC высоты AM и BK пересекаются в точке P. Найдите высоту BK, если $BP = 20$, $PM = 15$, $AP = 24$.

Ответ: ______________________



5. В треугольник KMN вписана окружность. Точка касания окружности со стороной KM делит ее на отрезки $KB = 3$ и $BM = 5$, сторона MN равна 12. Найдите длину стороны KN.

Ответ: ______________________

6. Основание равнобедренного треугольника равно 4, боковая сторона равна 3. Найдите косинус угла, противолежащего основанию.

1) $\frac{1}{9}$ 3) $-\frac{1}{9}$

2) $\frac{8}{9}$ 4) $-\frac{8}{9}$

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.
   2) Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, в 3 раза меньше радиуса описанной окружности.
   3) Центр окружности, описанной около остроугольного равнобедренного треугольника, лежит на высоте, проведённой к основанию.
   4) Если треугольник ABC описан около окружности с центром O, то $OA = OB = OC$.

Часть 2

8. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна 6, а средняя линия равна 4.

Ответ: ______________________

9. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Докажите, что $AB = AE$.

10. Параллелограмм $ABCD$ описан около окружности. Высота DK пересекает диагональ AC в точке E, причем $DE = 5$, $EK = 3$. Найдите площадь параллелограмма.

ГЕОМЕТРИЯ **вариант №1**

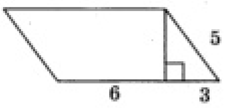
Тест 4

Часть 1

1. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 38°. Найдите второй острый угол.

Ответ: ________________________

2. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



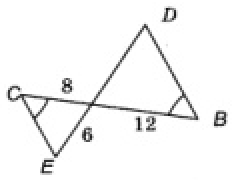
Ответ: ________________________

3. В окружности радиуса 17 проведена хорда BC, равная 30. Найдите косинус угла BOK, если O — центр окружности, K — середина хорды.

1) $\frac{4}{17}$ 3) $\frac{8}{15}$

2) $\frac{15}{17}$ 4) $\frac{8}{17}$

4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка DE.



Ответ: ________________________

5. В треугольник BCD вписана окружность с центром O, M — точка касания окружности со стороной BC. Найдите градусную меру угла BOM, если $\angle CBD = 56°$.

Ответ: ________________________

6. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6. Найдите длину хорды AB, если синус угла ACB равен $\frac{2}{3}$.

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Медиана треугольника делит пополам один из углов треугольника.
   2) Средняя линия треугольника соединяет середины двух его сторон.
   3) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна ее половине.
   4) Точка пересечения биссектрис треугольника может лежать вне треугольника.

Ответ: ________________________

Часть 2

8. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6. Прямая CM (точка M — середина стороны AB) пересекает окружность в точке T. Известно, что $CM = 9$, $\angle C = 30°$. Найдите CT.

Ответ: ________________________

9. Докажите, что если в равнобедренную трапецию с основаниями a и b вписана окружность, то ее радиус равен $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

10. В трапеции $ABCD$ диагональ DB является биссектрисой угла D. Биссектриса угла C пересекает большее основание AD в точке K. Найдите высоту трапеции, если $BD = 24$, $CK = 18$.

Тест 5

Часть 1

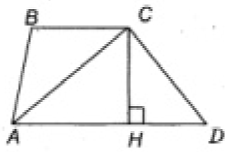
1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $\angle B = 92°$, $\angle C = 84°$. Найдите градусную меру угла D.

Ответ: ________________________

2. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 12 и 8.

Ответ: ________________________

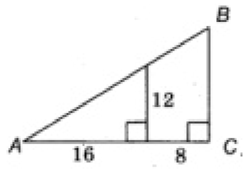
3. Найдите диагональ AC трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке, если высота трапеции равна 12, $\angle ACH = 45°$.



1) $6\sqrt{3}$ 3) $6\sqrt{2}$

2) $12\sqrt{3}$ 4) $12\sqrt{2}$

4. Найдите катет BC треугольника, изображённого на рисунке.



Ответ: ________________________

5. На окружности последовательно взяты пять точек: A, B, C, D и E, которые делят окружность на равные части. Найдите градусную меру угла ACD.

Ответ: ________________________

6. Радиус окружности с центром O равен 4. Найдите длину хорды BC, если косинус угла BOC равен $\frac{7}{8}$.

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади.
   2) Средние линии треугольника пересекаются в одной точке.
   3) Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
   4) Точка пересечения высот треугольника является центром вписанной в него окружности.

Ответ: ________________________

Часть 2

8. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки 10 и 26. Найдите площадь треугольника.

Ответ: ________________________

9. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, отрезок DK пересекает диагональ AC в точке M. Докажите, что отрезок CM в 3 раза меньше диагонали AC.

10. В треугольнике ABC высота BH, равная 6, и медиана CM, равная 5, пересекаются в точке O. Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Найдите сторону BC.

ГЕОМЕТРИЯ **вариант №2**

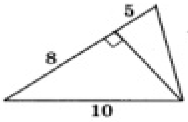
Тест 1

1. В трапеции один из углов, прилежащих к боковой стороне, на $54°$ меньше другого. Найдите больший из этих углов.

   Ответ: ______________________

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

   Ответ: ______________________



3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 12, BM — высота треугольника, синус угла MBC равен $\frac{3}{4}$. Найдите боковую сторону треугольника.

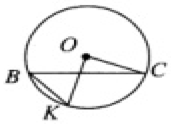
   Ответ: ______________________

4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите сторону AB.

   Ответ: ______________________

5. Найдите градусную меру угла OKB, изображённого на рисунке, если $\angle COK = 84°$, $\angle BCO = 14°$.

   Ответ: ______________________



6. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $BC = 6$, $AB = 5$, $\cos B = \frac{1}{5}$.

   Ответ: ______________________

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) В ромбе диагонали равны.
   2) Если в параллелограмме диагонали равны, то он является прямоугольником.
   3) Каждая диагональ прямоугольника делит пополам два противолежащих угла.
   4) В равнобедренной трапеции углы при меньшем основании равны.

Часть 2

8. В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M. Найдите радиус окружности, если $AM = 4$ и $BM = 6$.

   Ответ: ______________________

9. В треугольнике CDF проведены биссектриса CK и отрезок FP ($P \in CD$), причем $PK \parallel CF$, $DP = DK$. Докажите, что FP — биссектриса треугольника CDF.

10. В треугольнике ABC сторона BC равна 12, отрезки CM и BH являются высотами треугольника. Угол A равен $105°$. Найдите площадь треугольника MTH, если T — середина стороны BC.

Тест 2

Часть 1

1. Сумма двух углов параллелограмма равна $130°$. Найдите больший угол параллелограмма.

   Ответ: ______________________

2. В окружности проведены диаметр KL, хорды LN и NK. Найдите площадь треугольника KLN, если $LN = 12$, $NK = 8$.

   Ответ: ______________________

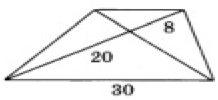
3. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ равна 17, сторона BC равна 15. Найдите синус угла BCA.

   1) $\frac{8}{15}$ 3) $\frac{15}{17}$

   2) $\frac{8}{17}$ 4) $\frac{15}{8}$

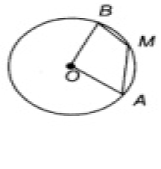
4. Найдите длину меньшего основания трапеции, изображённой на рисунке.

   Ответ: ______________________



5. Найдите градусную меру угла AMB, изображённого на рисунке, если $\angle AOB = 110°$.

   Ответ: ______________________



6. В треугольнике BCD угол C равен $75°$, угол D равен $45°$. Найдите CD, если $BC = 3\sqrt{6}$.

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Если в равнобедренном треугольнике есть угол, равный $98°$, то это угол при вершине, противолежащей основанию.
   2) Основание равнобедренного треугольника может быть в 3 раза больше боковой стороны.
   3) В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые из вершин при основании, равны.
   4) Если основания двух равнобедренных треугольников равны, то эти треугольники равны.

Часть 2

8. Дан правильный девятиугольник $ABCDEFGHK$ с центром O. Площадь треугольника AOD равна $9\sqrt{3}$. Найдите длину перпендикуляра OK, опущенного на диагональ AD.

   Ответ: ______________________

9. В треугольнике ABC проведены высоты BH и CM. Докажите, что если T — середина стороны BC, то треугольник MHT — равнобедренный.

10. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна $2\sqrt{2}$, сторона AD равна $2\sqrt{5}$. Точка K — середина стороны BC, отрезок DK перпендикулярен диагонали AC. Найдите диагональ BD.

Тест 3

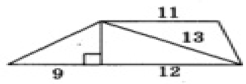
Часть 1

1. В равнобедренном треугольнике внешний угол при вершине, противолежащей основанию, равен $128°$. Найдите угол при основании.

   Ответ: ______________________

2. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

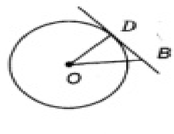
   Ответ: ______________________



3. Прямая BD касается в точке D окружности с центром O. Найдите радиус окружности, если $\angle BOD = 30°$, $BO = 18$.

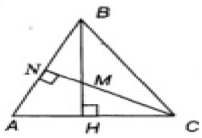
   1) $12\sqrt{3}$ 3) $9\sqrt{3}$

   2) 9 4) $9\sqrt{2}$



4. В треугольнике ABC высоты BH и CN пересекаются в точке M. Найдите высоту CN, если $MN = 12$, $BM = 16$, $MH = 15$.

   Ответ: ______________________



5. В треугольник PTM вписана окружность. Точка касания A окружности со стороной TM делит ее на отрезки $TA = 4$ и $AM = 7$, сторона PT равна 14. Найдите длину стороны PM.

   Ответ: ______________________

6. Основание равнобедренного треугольника равно 3, боковая сторона равна 6. Найдите косинус угла, противолежащего основанию.

   1) $\frac{1}{8}$ 3) $-\frac{1}{8}$

   2) $\frac{7}{8}$ 4) $-\frac{7}{8}$

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.
   1) Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его медиан.
   2) Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, в 2 раза меньше радиуса описанной окружности.
   3) Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на высоте, проведённой к боковой стороне.
   4) Если треугольник ABC вписан в окружность с центром O, то $OA = OB = OC$.

Часть 2

8. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна 8, а средняя линия равна 4.

9. В трапеции $ABCD$ диагональ DB является биссектрисой угла D. Биссектриса угла C пересекает большее основание AD в точке E. Докажите, что $DE = CD$.

10. Параллелограмм $ABCD$ описан около окружности. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M, причем $BM = 10$, $MH = 6$. Найдите площадь параллелограмма.

ГЕОМЕТРИЯ вариант №2

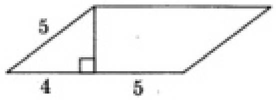
Тест 4

Часть 1

1. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 46°. Найдите второй острый угол.

Ответ: ________________

2. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

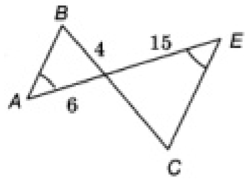


Ответ: ________________

3. В окружности радиуса 13 проведена хорда AC, равная 24. Найдите косинус угла MOC, если O — центр окружности, M — середина хорды.

1) $\frac{5}{26}$
2) $\frac{5}{13}$
3) $\frac{5}{12}$
4) $\frac{12}{13}$

4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка BC.



Ответ: ________________

5. В треугольник CDE вписана окружность с центром O, K — точка касания окружности со стороной DE. Найдите градусную меру угла EOK, если $\angle CED = 74°$.

Ответ: ________________

6. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 8. Найдите длину хорды BC, если синус угла BAC равен $\frac{3}{4}$.

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

1) Медиана треугольника делит пополам одну из сторон треугольника.
2) Средняя линия треугольника соединяет его вершину с серединой противолежащей стороны.
3) Биссектриса треугольника делит его на два треугольника равной площади.
4) Точка пересечения высот треугольника может лежать вне треугольника.

Ответ: ________________

Часть 2

8. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Прямая BK (точка K — середина стороны AC) пересекает окружность в точке P. Известно, что $BK = 9$, $\angle B = 30°$. Найдите BP.

Ответ: ________________

9. Докажите, что если в равнобедренную трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность, то высота трапеции равна $\sqrt{ab}$.

10. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 32$, $BE = 24$.

Тест 5

Часть 1

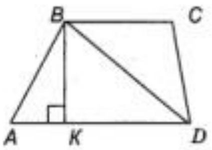
1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $\angle C = 76°$, $\angle D = 64°$. Найдите градусную меру угла A.

Ответ: ____________________

2. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 16 и 6.

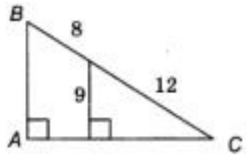
Ответ: ____________________

3. Найдите высоту трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке, если $BD = 18$, $\angle DBK = 45°$.



1) 9
2) $9\sqrt{2}$
3) $9\sqrt{3}$
4) $18\sqrt{2}$

4. Найдите катет BA треугольника, изображённого на рисунке.



Ответ: ____________________

5. На окружности последовательно взяты девять точек: A, B, C, D, E, F, G, H, K, которые делят окружность на равные части. Найдите градусную меру угла ADF.

Ответ: ____________________

6. Радиус окружности с центром O равен 6. Найдите длину хорды AB, если косинус угла AOB равен $\frac{7}{9}$.

Ответ: ____________________

7. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

1) Медиана может лежать вне треугольника.
2) Средняя линия треугольника равна половине одной из сторон треугольника.
3) Точка пересечения биссектрис треугольника является центром описанной около него окружности.
4) Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой треугольника.

Ответ: ____________________

Часть 2

8. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки 15 и 9. Найдите площадь треугольника.

Ответ: ____________________

9. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, отрезок BM пересекает диагональ AC в точке K. Докажите, что отрезок AK в 3 раза меньше диагонали AC.

10. В треугольнике ABC высота CH, равная 5, и медиана BM, равная 4, пересекаются в точке K. Расстояние от точки K до стороны AB равно 1. Найдите сторону BC.

ГЕОМЕТРИЯ **вариант №1**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тест 1	**111**	**96**	**18**	**18**	**42**	**9**	**13**	**8/3**	**-**	**16**
Тест 2	**125**	**42**	**3**	**25**	**115**	**12**	**23**	**4**	**-**	$5\sqrt{2}$
Тест 3	**72**	**96**	**2**	**38**	**10**	**1**	**13**	$8\sqrt{5}$.	**-**	**80**
Тест 4	**52**	**36**	**4**	**15**	**62**	**88**	**23**	**10**	**-**	**14,4**
Тест 5	**88**	**48**	**4**	**18**	**72**	**2**	**13**	**270**	**-**	$\frac{2}{3}\sqrt{85}$

ГЕОМЕТРИЯ

вариант №2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тест 1	**117**	**39**	**8**	**20**	**56**	**7**	**24**	**3**	**-**	**9**
Тест 2	**115**	**48**	**2**	**12**	**125**	**9**	**13**	**3**	**-**	$2\sqrt{5}$.
Тест 3	**64**	**80**	**3**	**32**	**17**	**2**	**24**	$16\sqrt{3}$	**-**	**320**
Тест 4	**44**	**27**	**2**	**14**	**53**	**12**	**14**	**13**	**-**	**19,2**
Тест 5	**104**	**48**	**2**	**15**	**80**	**4**	**24**	**216**	**-**	$\frac{2}{5}\sqrt{166}$

ГЕОМЕТРИЯ

Тест 1

Вариант 1

Часть 1

1. 111°. **2.** 96. **3.** 18. **4.** 18. **5.** 42°. **6.** 9. **7.** 13.

Часть 2

8. Ответ: $\frac{8}{3}$.

Подсказка: Пусть O — центр окружности, D — точка ее касания с основанием AC.

Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведённых из точки C, равны, и по теореме Пифагора найдем высоту $BD = 6$. Так как CO — биссектриса угла C, то высота BD точкой O разбита на отрезки $BO = 10x$ и $OD = 8x$, откуда $x = \frac{1}{3}$, $OD = r = \frac{8}{3}$.

9. *Подсказка:* Используя то, что BK — биссектриса угла B и $MK \parallel BC$, доказываем, что в треугольнике BMK углы B и K равны, откуда $MK = BM$. Затем доказываем, что $CK = BM = MK$, и используем свойство углов при основании равнобедренного треугольника и углов при параллельных прямых и секущей, чтобы доказать равенство углов MCK и MCB.

10. Ответ: 16.

Подсказка: Поскольку $\angle C$ — тупой, то точки K и M лежат на продолжениях сторон BC и AC. Используя то, что вписанные в окружность прямые углы опираются на диаметр, доказываем, что точки A, B, M и K лежат на окружности с центром P. Вычислим $\angle MBK$, а затем, используя то, что вписанный угол MBK и центральный угол MPK опираются на одну дугу, получим $\angle MPK = 30°$. Искомую площадь найдем по формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Вариант 2

Часть 1

1. 117°. **2.** 39. **3.** 8. **4.** 20. **5.** 56°. **6.** 7. **7.** 24.

Часть 2

8. Ответ: 3.

Подсказка: Пусть O — центр окружности, D — точка касания с основанием BC.

Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведённых из точки B, равны, и по теореме Пифагора найдем высоту $AD = 8$. Так как BO — биссектриса угла B, то высота AD точкой O разбита на отрезки $AO = 10x$ и $OD = 6x$, откуда $x = 2$, $OD = r = 0{,}5$.

9. *Подсказка:* Используя то, что CK — биссектриса угла C и $PK \parallel CF$, доказываем, что в треугольнике CPK углы C и K равны, откуда $CP = PK$. Затем доказываем, что $FK = CP = PK$, и используем свойство углов при основании равнобедренного треугольника и углов при параллельных прямых и секущей, чтобы доказать равенство углов PFK и PFC.

10. Ответ: 9.

Подсказка: Поскольку $\angle A$ — тупой, то точки H и M лежат на продолжениях сторон AB и AC. Используя то, что вписанные в окружность прямые углы опираются на диаметр, доказываем, что точки B, C, M и H лежат на окружности с центром T. Вычислим $\angle ACM$, а затем, используя то, что вписанный угол ACM и центральный угол MTH опираются на одну дугу, получим $\angle MTH = 30°$. Искомую площадь найдем по формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Тест 2

Вариант 1

Часть 1

1. 125°. **2.** 42. **3.** 3. **4.** 25. **5.** 115°. **6.** 12. **7.** 23.

Часть 2

8. Ответ: 4.

Подсказка: Так как центральный угол правильного девятиугольника равен 40°, то $\angle BOE = 120°$. Используя условие и формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, найдем радиус описанной окружности: $R = 8$. В прямоугольном треугольнике BOM найдем $OM = OB:2$ как катет, лежащий против угла 30°.

9. *Подсказка:* Так как $\angle AMB$ и $\angle AKB$ — прямые углы, а вписанные в окружность прямые углы опираются на диаметр, доказываем, что точки A, B, M и K лежат на окружности с центром P. Тогда PK и PM — радиусы этой окружности.

10. Ответ: $5\sqrt{2}$.

Подсказка: Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, E — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC. Используя то, что медианы треугольника ABD пересекаются в одной точке, докажем, что его медиана DK проходит через точку E. В прямоугольном треугольнике ABE медиана EK равна половине гипотенузы, то есть равна $\sqrt{5}$, а в треугольнике ABD медиана DK в 3 раза больше отрезка KE, то есть $DK = 3\sqrt{5}$. Стороны треугольника ADK равны $\sqrt{5}$, $\sqrt{45}$ и $\sqrt{50}$, то есть по теореме обратной теореме Пифагора $\angle K = 90°$. Тогда в треугольнике ABD медиана DK является и высотой, откуда $BD = AD$.

Вариант 2

Часть 1

1. 115°. **2.** 48. **3.** 2. **4.** 12. **5.** 125°. **6.** 9. **7.** 13.

Часть 2

8. Ответ: 3.

Подсказка: Так как центральный угол правильного девятиугольника равен 40°, то $\angle AOD = 120°$. Используя условие и формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, найдем радиус описанной окружности: $R = 6$. В прямоугольном треугольнике AOK найдем $OK = AO:2$ как катет, лежащий против угла 30°.

9. *Подсказка:* Так как $\angle BMC$ и $\angle BHC$ — прямые углы, а вписанные в окружность прямые углы опираются на диаметр, доказываем, что точки B, C, M и H лежат на окружности с центром T. Тогда TM и TH — радиусы этой окружности.

10. Ответ: $2\sqrt{5}$. *Подсказка:* Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, E — точка пересечения отрезка DK с диагональю AC. Медианы треугольника BCD пересекаются в одной точке, значит, медиана BM проходит через точку E. В прямоугольном треугольнике CDE медиана EM равна половине гипотенузы, то есть равна $\sqrt{2}$, а в треугольнике BCD медиана BM в 3 раза больше отрезка EM, то есть $BM = 3\sqrt{2}$. Стороны треугольника BCM равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$ и $\sqrt{20}$, то есть по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle M = 90°$. Тогда в треугольнике BCD медиана BM является и высотой, откуда $BD = BC$.

Тест 3

Вариант 1

Часть 1

1. 72°. **2.** 96. **3.** 2. **4.** 38. **5.** 10. **6.** 1. **7.** 13.

Часть 2

8. Ответ: $8\sqrt{5}$.

Подсказка: В равнобедренной трапеции высота разбивает основание на отрезки, больший из которых равен средней линии трапеции. Этот отрезок вместе с диагональю и высотой трапеции образуют прямоугольный треугольник, в котором можно вычислить высоту: $h = 2\sqrt{5}$. Затем вычисляем площадь трапеции как произведение высоты и средней линии.

9. *Подсказка:* Пусть M — точка пересечения отрезка BE с диагональю AC. Так как $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, то $\angle BAM + \angle ABM = 90°$ и в треугольнике ABE биссектриса AM является высотой, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием BE.

10. Ответ: 80.

Подсказка: Если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом. Пусть точка K лежит на стороне BC (если она лежит на стороне AB, решение не изменится). CE — биссектриса треугольника CDK, она делит сторону DK на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть можно считать, что $CD = 5x$, $CK = 3x$. Используя теорему Пифагора, найдем x и сторону $CD = 10$. Площадь ромба найдем по формуле $S = ah$.

Вариант 2

Часть 1

1. 64°. **2.** 80. **3.** 3. **4.** 32. **5.** 17. **6.** 2. **7.** 24.

Часть 2

8. Ответ: $16\sqrt{3}$.

Подсказка: В равнобедренной трапеции высота разбивает основание на отрезки, больший из которых равен средней линии трапеции. Этот отрезок вместе с диагональю и высотой трапеции образуют прямоугольный треугольник, в котором можно вычислить высоту: $h = 4\sqrt{3}$. Затем вычисляем площадь трапеции как произведение высоты и средней линии.

9. *Подсказка:* Пусть M — точка пересечения отрезка CE с диагональю BD. Используя то, что DB — биссектриса угла D и $BC \parallel AD$, докажем, что $CD = BC$. Тогда треугольник BCD — равнобедренный и CM — биссектриса, проведённая к основанию, то есть CM является и высотой. В треугольнике CDE биссектриса DM является высотой, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием CE.

10. Ответ: 320. *Подсказка:* Если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом. Пусть точка H лежит на стороне AD (если она лежит на стороне CD, решение не изменится). AM — биссектриса треугольника ABH, она делит сторону BH на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть можно считать, что $AB = 5x$, $AH = 3x$. Используя теорему Пифагора, найдем x и сторону $AB = 20$. Площадь ромба найдем по формуле $S = ah$.

Тест 4

Вариант 1

Часть 1

1. 52°. **2.** 36. **3.** 4. **4.** 15. **5.** 62°. **6.** 8. **7.** 23.

Часть 2

8. Ответ: 10.

Подсказка: Найдем длину стороны по теореме синусов: $AB = 2R\cdot\sin C = 6$. Затем используем свойство отрезков пересекающихся хорд, чтобы вычислить длину отрезка MT.

9. *Подсказка:* Пусть BC и AD — основания трапеции $ABCD$, O — центр вписанной в нее окружности, M — точка касания окружности со стороной AB. Точка M разбивает сторону AB на отрезки, равные половинам оснований. Используя свойства углов при параллельных прямых и секущей и расположение центра вписанной окружности на биссектрисах углов трапеции, доказываем, что ΔAOB — прямоугольный. Искомое равенство докажем, используя то, что радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной и соотношения в прямоугольном треугольнике, в котором проведена высота к гипотенузе. (Другой способ доказательства приведен к заданию 9 варианта 2.)

10. Ответ: 14,4. *Подсказка:* Пусть M — точка пересечения отрезка CK с диагональю BD. Используя то, что DB — биссектриса угла D и $BC \parallel AD$, докажем, что $CD = BC$. Тогда треугольник BCD — равнобедренный и CM — биссектриса, проведённая к основанию, то есть CM является и высотой. В треугольнике CDK биссектриса DM является высотой, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием CK. Докажем, что $BCDK$ — параллелограмм. Так как доказано равенство трёх его сторон, то $BCDK$ — ромб. Вычислим сторону ромба, используя перпендикулярность его диагоналей: $CD = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$. Высоту найдем, используя две формулы площади ромба — как произведение стороны и высоты и как половину произведения диагоналей.

Вариант 2

Часть 1

1. 44°. **2.** 27. **3.** 2. **4.** 14. **5.** 53°. **6.** 12. **7.** 14.

Часть 2

8. Ответ: 13. *Подсказка:* Найдем длину стороны по теореме синусов: $AC = 2R\cdot\sin B = 12$. Затем используем свойство отрезков пересекающихся хорд, чтобы вычислить длину отрезка MT.

9. *Подсказка:* Пусть AD — большее основание трапеции $ABCD$, BH — ее высота. Точка касания окружности с боковой стороной равнобедренной трапеции разбивает ее на отрезки, равные половинам оснований. А высота отсекает на большем основании отрезок, прилежащий к боковой стороне, равный половине разности оснований. Используя эти соотношения и теорему Пифагора, вычислим катет BH в треугольнике ABH. (Другой способ доказательства приведен к заданию 9 варианта 1.)

10. Ответ: 19,2. *Подсказка:* Пусть M — точка пересечения отрезка BE с диагональю AC. Используя то, что AC — биссектриса угла A и $BC \parallel AD$, докажем, что $AB = BC$. Тогда треугольник ABC — равнобедренный и BM — биссектриса, проведённая к основанию, то есть BM является и высотой. А в треугольнике ABE биссектриса AM является высотой, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием BE. Докажем, что $ABCE$ — параллелограмм. Так как доказано равенство трёх его сторон, то $ABCE$ – ромб. Вычислим сторону ромба, используя перпендикулярность его диагоналей: $CD = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$. Высоту найдем, используя две формулы площади ромба — как произведение стороны и высоты и как половину произведения диагоналей.

Тест 5

Вариант 1

Часть 1

1. 88°. **2.** 48. **3.** 4. **4.** 18. **5.** 72°. **6.** 2. **7.** 13.

Часть 2

8. Ответ: 270.

Подсказка: По свойству биссектрисы треугольника второй катет и гипотенуза пропорциональны отрезкам 10 и 26, поэтому можно считать, что гипотенуза равна $13x$, а катет — $5x^1$. Используя терему Пифагора, выразим данный катет, решим уравнение $12x = 36$, найдем неизвестный катет и вычислим площадь треугольника.

9. *Подсказка:* Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Используя свойство диагоналей параллелограмма, докажем, что M — точка пересечения медиан треугольника BCD. Далее вычислим, какую часть составляет отрезок CM от отрезка OC и от всей диагонали AC.

10. Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{85}$. *Подсказка:* Отложим на луче CM отрезок $MD = CM$. Докажем, что $ADBC$ — параллелограмм, используя признак параллелограмма. Затем, используя параллельность прямых BD и AC, докажем подобие треугольников DOB и COH с коэффициентом подобия 5. Пусть $CH = x$, тогда $BD = 5x$, $AH = 4x$. Используя теорему Пифагора, выразим через x стороны AB и BC и составим уравнение относительно x, используя свойство сторон и диагоналей параллелограмма $ADBC$.

Вариант 2

Часть 1

1. 104°. **2.** 48. **3.** 2. **4.** 15. **5.** 80°. **6.** 4. **7.** 24.

Часть 2

8. Ответ: 216. *Подсказка:* По свойству биссектрисы треугольника второй катет и гипотенуза пропорциональны отрезкам 9 и 15, поэтому можно считать, что гипотенуза равна $5x$, а катет — $3x^1$. Используя терему Пифагора, выразим данный катет, решим уравнение $4x = 24$, найдем неизвестный катет и вычислим площадь треугольника.

9. *Подсказка:* Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Используя свойство диагоналей параллелограмма, докажем, что K — точка пересечения медиан треугольника ABD. Далее вычислим, какую часть составляет отрезок AK от отрезка AO и от всей диагонали AC.

10. Ответ: $\frac{2}{5}\sqrt{166}$. *Подсказка:* Отложим на луче BM отрезок $MD = BM$. Докажем, что $ADCB$ — параллелограмм, используя признак параллелограмма. Затем, используя параллельность прямых CD и AB, докажем подобие треугольников DKC и BKH с коэффициентом подобия 4. Пусть $BH = x$, тогда $CD = 4x$, $AH = 3x$. Используя теорему Пифагора, выразим через x стороны AC и BC и составим уравнение относительно x, используя свойство сторон и диагоналей параллелограмма $ADCB$.